

第三章 (离散时间) Markov 链

- 这是最简单最经典也最早被研究的随机过程, 源自对天气预报, 赌博收益, 股票走势等问题的关注.
- 以这样一个直观模型作为开始, 目的是让大家对随机过程的问题和研究方法有一个基本的认识.



- 1 马氏链的基本定义
 - 引例
 - 定义及例
- 2 Chapman-Kolmogorov 方程与状态的分类
 - Chapman-Kolmogorov 方程
 - 有限维分布与相关概率计算
 - 状态之间的关系
 - 状态的分类
- 3 转移概率的极限性质与平稳分布
 - 关注的问题
 - 基本极限定理
 - 平稳分布
- 4 习题点评
 - 习题二
 - 习题三



第 3.2 节 马氏链的基本定义



引例. (简单随机游动)

假设甲乙两人游戏, 每局甲赢 1 元的概率是 p 输 1 元的概率是 $q = 1 - p$. 假设一开始甲手里是 0 元, 记 S_n 为 n 局之后甲拥有的钱数.

1. 计算条件概率

$$\mathbb{P}(S_8 = 4 | S_1 = 1, S_3 = 1, S_4 = 2) \text{ 及 } \mathbb{P}(S_8 = 4 | S_4 = 2);$$

2. 试了解二者是否相等.



事实上,

- $$\begin{aligned} & \mathbb{P}(S_8 = 4 | S_1 = 1, S_3 = 1, S_4 = 2) \\ &= \mathbb{P}(S_8 - S_4 = 2 | S_1 = 1, S_3 = 1, S_4 = 2) \\ &= \mathbb{P}(S_8 - S_4 = 2) = 4p^3q, \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} & \mathbb{P}(S_8 = 4 | S_4 = 2) = \mathbb{P}(S_8 - S_4 = 2 | S_4 = 2) \\ &= \mathbb{P}(S_8 - S_4 = 2) = 4p^3q. \end{aligned}$$

#



$\{X_n, n \geq 0\}$: 以至多可列集 E 为状态空间的离散时间过程.

定义 3.2.1

若对任意 $n \geq 0, i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in E,$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i), \end{aligned}$$

则称 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为马氏链 (Markov 链).

注. (习题 6) 对一个马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$, 证明:

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_{n_1} = i_1, \dots, X_{n_k} = i_k) = \mathbb{P}(X_n = j | X_{n_k} = i_k),$$

当 $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n$ 时皆成立.



定义 3.2.1 (续)

- 对任意 $i, j \in E, n \geq 0$, 称

$$P_{ij}(n) := \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

为过程在 n 时刻的一步转移概率.

- 若 $P_{ij}(n) = P_{ij}$ 与 n 无关, 则称 X 为时齐马氏链.

记 $\mathbf{P} = (P_{ij})$, 称为 X 的一步转移概率矩阵, 简称转移矩阵, 其阶数由 E 中元素个数 $|E|$ 决定.

在本章节中, 我们仅考虑时齐马氏链.



注释.

转移概率与转移矩阵是一一对应的.

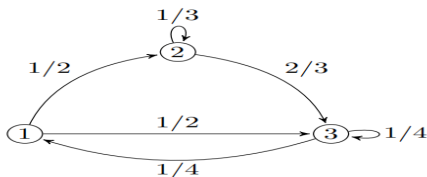
- 转移矩阵的元素即转移概率, 满足

① 非负性: $\forall i, j \in E, P_{ij} \geq 0$;

② 正则性: $\forall i \in E, \sum_{j \in E} P_{ij} = 1$.

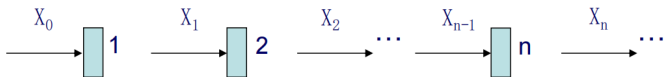
(一般的, 元素满足上述两条的矩阵也称为随机矩阵.)

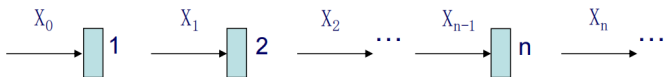
- 转移函数也可以形象地用图表示(如下), 称为状态转移图.



例 1. (0-1 传输系统)

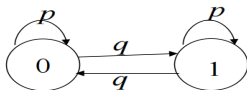
只传 0 和 1 的串联系统中, 设每一级的传真率为 p , 误码率为 $q = 1 - p$. 用 X_0 表示第一级的输入, X_n 表示第 n 级的输出, $n \geq 1$.





可见 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个以 $E = \{0, 1\}$ 为状态空间的时齐马氏链, 转移概率

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} p, & j = i, \\ q, & j \neq i, \end{cases} \quad i, j = 0, 1.$$



(状态转移图)

例 2. 独立重复地掷骰子, 用 X_n 表示第 n 次掷出的点数, 令

$$Y_n = X_{n+1} + X_{n+2}, n \geq 0.$$

(1) 计算条件概率

- $\mathbb{P}(Y_2 = 12 | Y_0 = 2, Y_1 = 7),$
- $\mathbb{P}(Y_2 = 12 | Y_1 = 7);$

(2) 判断 $\{Y_n\}$ 是否是马氏链?



(1)

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(Y_2 = 12 | Y_0 = 2, Y_1 = 7) \\
 &= \mathbb{P}(X_3 = X_4 = 6 | X_1 = 1 = X_2, X_3 = 6) = \frac{1}{6}, \\
 & \mathbb{P}(Y_2 = 12 | Y_1 = 7) = \frac{\mathbb{P}(Y_2 = 12, Y_1 = 7)}{\mathbb{P}(Y_1 = 7)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(X_2 = 1, X_3 = X_4 = 6)}{\mathbb{P}(X_2 + X_3 = 7)} = \frac{(\frac{1}{6})^3}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{36}.
 \end{aligned}$$

(2) 因为

$$\mathbb{P}(Y_2 = 12 | Y_0 = 2, Y_1 = 7) \neq \mathbb{P}(Y_2 = 12 | Y_1 = 7),$$

所以 $\{Y_n\}$ 不是马氏链.

#



两个条件概率公式

引理 3.2.1

设 A, B, C 为三个随机事件, 则

$$\mathbb{P}(BC|A) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(C|AB).$$

引理 3.2.2

设 A, B, C 为三个随机事件, 则

$$\mathbb{P}(C|AB) = \mathbb{P}(C|B) \Leftrightarrow \mathbb{P}(AC|B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(C|B).$$

此时, 称 A, C 关于 B 有条件独立性.



n 步转移概率

对于 $n \geq 1, m \geq 0, i, j \in E$,

$\mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_m = i) =: P_{ij}^{(n)}$: 与 m 无关, 是 n 步转移概率.

相应的, $P_{ij}^{(n)}$ 是 n 步转移概率矩阵.

- n 步转移概率矩阵也是随机矩阵;

- 显然 $P_{ij}^{(1)} = P_{ij}$, $P_{ij}^{(0)} \equiv \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

(P_{ij}) 是一步转移概率矩阵, $(P_{ij}^{(0)}) = I$ 是单位矩阵.



Chapman-Kolmogorov 方程

定理 3.3.1

对任意 $n, m \geq 0, i, j \in E$,

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_k P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)} \quad \text{或} \quad \mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{P}^{(m)}.$$

▷ (直观意义)

从 i 发经 $n+m$ 步到达 j 可分为两个阶段走:

- 先从 i 发经 n 步到 k ,
- 再从 k 经 m 步到达 j .



证. 由引理 3.2.1 与 n 时刻的马氏性,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_0 = i) &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X_{n+m} = j, X_n = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = k, X_0 = i) \mathbb{P}(X_n = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} P_{kj}^{(m)} P_{ik}^{(n)}.\end{aligned}$$

□

有如下一个推论.

n 步转移矩阵可以由一步转移矩阵的 n 次幂得到:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n.$$



有限维分布

定理 3.2.1

以 $p_i := \mathbb{P}(X_0 = i)$ ($i \in E$) 为初始分布的 Markov 链 X 的有限维分布: $i_0, i_1, \dots, i_n \in E$,

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = p_{i_0} P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{n-1} i_n},$$

即由初始分布和转移概率完全确定.

(由乘法公式及马氏性即可证明.)



命题.

$$(1) \text{ 对任意 } n \geq 1, \mathbb{P}(X_n = j) = \sum_i \mathbb{P}(X_0 = i) P_{ij}^{(n)};$$

$$(2) \text{ 对任意 } n_1 < n_2 < \cdots < n_k,$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \cdots, X_{n_k} = i_k) \\ &= \mathbb{P}(X_{n_1} = i_1) P_{i_1 i_2}^{(n_2 - n_1)} \cdots P_{i_{k-1} i_k}^{(n_k - n_{k-1})}. \end{aligned}$$

注. 从数学上看, 可视一随机矩阵为一个马氏链:

有限维分布完全由初始分布和一步转移概率确定.



命题的证明.

- (1) 利用全概率公式即可;
- (2) 由乘法公式,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \dots, X_{n_k} = i_k) \\ &= \mathbb{P}(X_{n_1} = i_1) \mathbb{P}(X_{n_2} = i_2 | X_{n_1} = i_1) \cdots \\ & \quad \mathbb{P}(X_{n_k} = i_k | X_{n_1} = i_1, \dots, X_{n_{k-1}} = i_{k-1}) \\ &= \mathbb{P}(X_{n_1} = i_1) P_{i_1 i_2}^{(n_2 - n_1)} \cdots P_{i_{k-1} i_k}^{(n_k - n_{k-1})}. \end{aligned}$$

□



相关计算主要是状态转移的概率规律, 可借用形象的状态转移图.

例 3.2.3 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是具有三个状态 0, 1, 2 的时齐 Markov 链, 一步转移矩阵为

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

初始分布为 $\mathbb{P}(X_0 = i) = 1/3, i = 0, 1, 2$, 试求:

- (1) $\mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 1, X_4 = 1)$;
- (2) $\mathbb{P}(X_2 = 1, X_4 = 1, X_5 = 0 | X_0 = 0)$;
- (3) $\mathbb{P}(X_2 = 1, X_4 = 1, X_5 = 0)$.



实例：天气预报

假设状态空间 $E = \{\text{晴}, \text{阴}, \text{雨}\}$. 现查看过去 30 天的天气记录, 统计每日变化情况:

- 晴天后, 次日分别晴, 阴, 雨的天数: 10次, 5次, 2次,
- 阴天后, 次日分别晴, 阴, 雨的天数: 3次, 8次, 4次,
- 雨天后, 次日分别晴, 阴, 雨的天数: 1次, 2次, 6次.

可以通过多次进行状态转移, 预测未来几天的天气变化.



例 3.2.4 设 $\{S_n, n \geq 0\}$ 是一个从零出发, 状态空间为 \mathbb{Z} 的马氏链. 相应的转移矩阵满足

$$P_{i,i+1} = p, P_{i,i-1} = q, i \in \mathbb{Z}.$$

可证, $\{|S_n|, n \geq 0\}$ 也是一条 Markov 链:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(|S_{n+1}| = i + 1 \mid |S_n| = i, |S_{n-1}|, \dots, |S_1|) \\ &= \mathbb{P}(|S_{n+1}| = i + 1 \mid |S_n| = i), \forall i > 0. \end{aligned}$$

引理.

对任意 $i, i_1, i_2, \dots, i_{n-1} > 0$,

$$\mathbb{P}(S_n = i \mid |S_n| = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \dots, |S_1| = i_1) = \frac{p^i}{p^i + q^i}.$$



证明引理之前我们先化简左式: 令 $i_0 = 0$, 取

$$j := \max\{k = 0, 1, \dots, n-1 : i_k = 0\},$$

$$\begin{aligned} & \frac{P(S_n=i \mid |S_n|=i, \dots, |S_{j+1}|=i_{j+1}, S_j=0, |S_{j-1}|=i_{j-1}, \dots, |S_1|=i_1)}{C} \\ &= \left(\frac{P(B|A)}{P(B|A)} \right) = \frac{P(S_n=i, |S_{n-1}|=i_{n-1}, \dots, |S_{j+1}|=i_{j+1} \mid S_j=0, \dots, |S_1|=i_1)}{P(|S_n|=i, \dots, |S_{j+1}|=i_{j+1} \mid S_j=0, \dots, |S_1|=i_1)} \\ & \stackrel{\uparrow}{=} \frac{P(S_n=i, |S_{n-1}|=i_{n-1}, \dots, |S_{j+1}|=i_{j+1} \mid S_j=0)}{P(|S_n|=i, \dots, |S_{j+1}|=i_{j+1} \mid S_j=0)} \\ & \stackrel{\substack{\text{利用 } j \text{ 时刻} \\ \text{的马尔可夫性}}}{=} \frac{P(S_n=i, |S_{n-1}|=i_{n-1}, \dots, |S_{j+1}|=i_{j+1}, S_j=0)}{P(|S_n|=i, |S_{n-1}|=i_{n-1}, \dots, |S_{j+1}|=i_{j+1}, S_j=0)} \\ &= P(S_n=i \mid |S_n|=i, \dots, |S_{j+1}|=i_{j+1}, S_j=0) \end{aligned}$$



引理的证.

事实上,

$$\begin{aligned} \text{左式} &= \mathbb{P}(S_n = i \mid |S_n| = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \dots, |S_{j+1}| = i_{j+1}, S_j = 0) \\ &= \frac{\mathbb{P}(S_n = i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \dots, |S_{j+1}| = i_{j+1}, S_j = 0)}{\mathbb{P}(S_n = \pm i, |S_{n-1}| = i_{n-1}, \dots, |S_{j+1}| = i_{j+1}, S_j = 0)} \\ &= \frac{p^{\frac{n-j}{2} + \frac{i}{2}} q^{\frac{n-j}{2} - \frac{i}{2}}}{p^{\frac{n-j}{2} + \frac{i}{2}} q^{\frac{n-j}{2} - \frac{i}{2}} + p^{\frac{n-j}{2} - \frac{i}{2}} q^{\frac{n-j}{2} + \frac{i}{2}}} \\ &= \text{右式}. \end{aligned}$$



$\{|S_n|, n \geq 0\}$ 是马氏链的证

取 $A = \{|S_n| = i, |S_{n-1}|, \dots, |S_1|\}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(|S_{n+1}| = i + 1 \mid |S_n| = i, |S_{n-1}|, \dots, |S_1|) \\ = & \frac{\mathbb{P}(|S_{n+1}| = i + 1, S_n = i; A) + \mathbb{P}(|S_{n+1}| = i + 1, S_n = -i; A)}{\mathbb{P}(A)} \\ = & \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = 1, S_n = i; A) + \mathbb{P}(X_{n+1} = -1, S_n = -i; A)}{\mathbb{P}(A)} \\ = & \mathbb{P}(X_{n+1} = 1)\mathbb{P}(S_n = i \mid A) + \mathbb{P}(X_{n+1} = -1)\mathbb{P}(S_n = -i \mid A) \\ = & \frac{p^{i+1} + q^{i+1}}{p^i + q^i}, \quad i > 0. \end{aligned}$$



所以 $\{|S_n|, n \geq 1\}$ 一条 Markov 链, 相应的转移概率为

$$\begin{cases} \tilde{P}_{i,i+1} = \frac{p^{i+1} + q^{i+1}}{p^i + q^i} = 1 - \tilde{P}_{i,i-1} & i \geq 1, \\ \tilde{P}_{0,1} = 1. \end{cases}$$

#

注. 对于从非零点出发的 Markov 链则没有这个结果.



获得Markov链的模式

定理 3.2.2

设整数值随机变量序列 $\{X_n, n \geq 0\}$ 满足如下两个条件:

- (1) $X_n = f(X_{n-1}, \zeta_n)$;
- (2) $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ 是独立同分布的随机序列且 X_0 与 $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ 也相互独立,

则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是 Markov 链, 其转移概率为

$$P_{ij} = \mathbb{P}(f(i, \zeta_1) = j).$$



证. 只需证

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n),$$

事实上, 注意到 ξ_{n+1} 与 X_0, X_1, \dots, X_n 相互独立,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) \\ &= \mathbb{P}(f(X_n, \xi_{n+1}) = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) \\ &= \mathbb{P}(f(i_n, \xi_{n+1}) = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) \\ &= \mathbb{P}(f(i_n, \xi_{n+1}) = i_{n+1}), \end{aligned}$$

另外,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) = \mathbb{P}(f(i_n, \xi_{n+1}) = i_{n+1}).$$

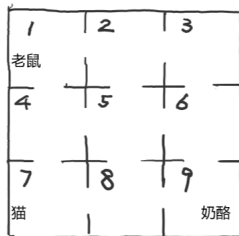


例 3.3.1 (A mouse in a maze) 方形迷津中, mouse 指定在 1 号格子, 假设 cat 耐心地等在 7 号格子, 9 号中有一块 cheese,

$$\mathbb{P}(\text{mouse 进入相邻格子}) = 1/k, \quad k = 2, 3, 4.$$

再假设一旦找到 cheese 或碰到 cat 就永远呆在那里, X_n 表示 mouse 换了 n 个格子后所在位置.

求概率 $P_{17}^{(2)}, P_{17}^{(4)}$.



解. $\{X_n, n \geq 0\}$ 是 Markov 链, $E = \{1, 2, \dots, 9\}$. 相应转移矩阵为

$$\begin{pmatrix} & 1/2 & & 1/2 & & & & & \\ 1/3 & & 1/3 & & 1/3 & & & & \\ & 1/2 & & & & 1/2 & & & \\ 1/3 & & & & 1/3 & & 1/3 & & \\ & 1/4 & & 1/4 & & 1/4 & & 1/4 & \\ & & 1/3 & & 1/3 & & & & 1/3 \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & 1/3 & & 1/3 & & 1/3 \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$



注意到, 若 n 为奇数, $P_{17}^{(n)} = 0 = P_{19}^{(n)}$. n 是偶数时,

$$P_{17}^{(2)} = \frac{11}{23} = \frac{1}{6},$$

$$\begin{aligned} P_{17}^{(4)} &= \frac{1111}{2323} + \frac{1111}{2343} + \frac{1111}{2343} + \frac{1111}{2323} + \frac{1111}{2343} \\ &\quad + \frac{1111}{2343} + \frac{11}{23} \\ &= \frac{5}{18}, \\ &\quad \dots \dots \end{aligned}$$

利用 Matlab: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $P_{17}^{(2n)} \rightarrow 0.6$, $P_{19}^{(2n)} \rightarrow 0.4$. #



等价关系: 相通性

对于 Markov 链 $\{X_n, n \geq 0\}$.

定义 3.3.1

考虑任意两个状态 $i, j \in E$

- 若存在 $n \geq 0$ 使得 $P_{ij}^{(n)} > 0$, 则称 i 到 j 可达, 记作 $i \rightarrow j$.
若 $P_{ij}^{(n)} = 0, \forall n \geq 1$, 则称 i 到 j 不可达, 记作 $i \nrightarrow j$.
- 若 $i \rightarrow j$ 且 $j \rightarrow i$, 则称 i 与 j 相通, 记作 $i \leftrightarrow j$.

下面的命题说明可达是传递的.



命题 3.3.1

若 $i \rightarrow j$ 且 $j \rightarrow k$, 则 $i \rightarrow k$.

证. 由假设, 存在 $n, m \geq 0$, 使得

$$P_{ij}^{(n)} > 0, P_{jk}^{(m)} \geq 0.$$

由 C-K 方程, 有

$$P_{ik}^{(n+m)} = \sum_{\ell} P_{i\ell}^{(n)} P_{\ell k}^{(m)} > P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(m)} > 0.$$



下面的命题说明相通是传递的也是对称的. 相通性是等价关系.

命题 3.3.2

- (1) (自反性) $i \leftrightarrow i$.
- (2) (对称性) 若 $i \leftrightarrow j$, 则 $j \leftrightarrow i$; $i \leftrightarrow i$.
- (3) (传递性) 若 $i \leftrightarrow j$ 且 $j \leftrightarrow k$, 则 $i \leftrightarrow k$.



状态的分类

利用相通关系, 可将相通的状态归为一个等价类.
每个状态属于且只属于一个类. 或者说,

状态空间可分为不交等价类的并.

定义 3.3.2

若 Markov 链的状态空间只存在一个等价类, 即一切状态彼此相通, 则称该 Markov 链是不可约的.

(如书中例 3.2.3)



称子集 $C \subset E$ 是闭的, 若 $\forall x \in C, y \notin C$, 有 $p_{xy} = 0$.
等价于

$$\forall x \in C, \text{ 有 } \sum_{y \in C} p_{xy} = 1.$$

注. 闭集中的任何状态均不可达闭集外的状态. 故

X 不可约当且仅当 E 没有非平凡闭子集;

另外, 限制在一个闭集上的马氏链仍然是一个马氏链.



周期性

定义 3.3.3

若集合 $\{n \geq 1 : P_{ii}^{(n)} > 0\}$ 非空, 则称该集合的最大公约数

$$d(i) := \text{GCD}\{n \geq 1 : P_{ii}^{(n)} > 0\}$$

为 i 的周期.

- ▷ 若 $d(i) > 1$, 则称 i 是周期的;
- ▷ 若 $d(i) = 1$, 则称 i 是非周期的.

注. 若 $P_{ii} > 0$, 可推出对任意 n , 有 $P_{ii}^{(n)} > 0$.



例 3.3.3 (直线上无限制随机游动) 质点在数轴上做随机游动, 每单位时间移动一次, 或左或右或原地不动. 设每次移动都相互独立, X_n 表示经 n 次移动后的位置, 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一条 Markov 链. 转移概率为

$$P_{i,i+1} = p, P_{i,i-1} = q, P_{i,i} = r \quad (p + q + r = 1).$$

- ▶ 当 $r = 0, 0 < p < 1$ 时, $\{n \geq 1 : P_{00}^{(n)} > 0\} = \{2, 4, 6, \dots\}$, 所以 $d(0) = 2$, 也就是说, 0 是周期的.
- ▶ 当 $p, q, r > 0$ 时, $\{n \geq 1 : P_{00}^{(n)} > 0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$, 所以 $d(0) = 1$, 即此时 0 是非周期的. #



周期性是个类性质.

命题 3.3.3

若 $i \leftrightarrow j$, 则 $d(i) = d(j)$.

证*. 令 $l, n \geq 0$ 满足 $P_{ij}^{(n)} > 0, P_{ji}^{(l)} > 0$, 则

$$P_{ii}^{(l+n)} \geq P_{ij}^{(n)} P_{ji}^{(l)} > 0, P_{jj}^{(l+n)} \geq P_{ji}^{(l)} P_{ij}^{(n)} > 0,$$

也就是说, $l+n$ 可同时被 $d(i), d(j)$ 整除. 若 $P_{ii}^{(m)} > 0$, 则

$$P_{jj}^{(l+m+n)} \geq P_{ji}^{(l)} P_{ii}^{(m)} P_{ij}^{(n)} > 0 \implies d(j) | l+m+n,$$

所以 $d(j) | m$, 从而 $d(j)$ 整除 m 的最大公约数, i.e.,
 $d(j) | d(i)$. 同理 $d(i) | d(j)$, 故有

$$d(i) = d(j).$$



例 1. 考虑状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3\}$, 转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

讨论状态的周期性. 事实上,

由 $p_{33} > 0$ 可知 $d(3) = 1$,

即状态 3 非周期, 而各状态互达, 所以所有状态都是非周期的, 该链是个非周期链. #



几个重要的概率:

引入状态 $j \in E$ 的首中时:

$$T_j := \min\{n \geq 1 : X_n = j\} \quad (\text{约定 } \min \emptyset = \infty).$$

- ① 对任意 n , 记 $f_{ij}^{(n)}$ 为 i 发经 n 步首次到达 j 的概率:

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(n)} &:= \mathbb{P}(T_j = n | X_0 = i) \\ &= \mathbb{P}(X_n = j, X_k \neq j, k = 1, 2, \dots, n-1 | X_0 = i), \\ f_{ij}^{(0)} &\equiv 0. \end{aligned}$$

- ② $f_{ij} := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(T_j < \infty | X_0 = i)$:

i 发经有限步最终到达 j 的概率.



常返性与暂留性

注. $0 \leq f_{ij}^{(n)} \leq P_{ij}^{(n)} \leq f_{ij} \leq 1.$

当 $i \neq j$ 时, $i \rightarrow j$ 当且仅当 $f_{ij} > 0.$

定义 3.3.4

- 若 $f_{ii} = 1$, 则称 i 为常返状态, 即

从 i 出发以概率 1 在有限时间内返回 i ;

- 若 $f_{ii} < 1$, 则称 i 为非常返状态/暂留状态, 即

从 i 出发以正概率不再返回 i .

(见书中例 3.3.4)



定理 3.3.2:(判定定理)

- i 常返的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$. 等价地,
- i 暂留的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}} < \infty.$$

注. $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \mathbb{E}[\sum_{n \geq 1} I_{\{X_n=i\}} | X_0 = i]$

$$\begin{cases} = \infty, & \text{若 } i \text{ 常返,} \\ \left(= \frac{1}{1 - f_{ii}} \right) < \infty, & \text{若 } i \text{ 非常返.} \end{cases}$$



方便起见, 记

$$\mathbb{P}^i(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot | X_0 = i).$$

上述定理中两个条件有如下直观意义:

- 若 i 常返 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$:

$$\mathbb{P}^i(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n = i\}) = 1;$$

- 若 i 非常返 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$:

$$\mathbb{P}^i(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n = i\}) = 0.$$

推论 3.3.1

若 i 常返且 $i \rightarrow j$, 则 j 常返且 $f_{ji} = 1$.



方便起见, 记

$$\mathbb{P}^i(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot | X_0 = i).$$

上述定理中两个条件有如下直观意义:

- 若 i 常返 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$:

$$\mathbb{P}^i(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n = i\}) = 1;$$

- 若 i 非常返 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$:

$$\mathbb{P}^i(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n = i\}) = 0.$$

推论 3.3.1

若 i 常返且 $i \rightarrow j$, 则 j 常返且 $f_{ji} = 1$.



Polya 定理: 考虑无限制的 SRW

(1) 设 $E = \mathbf{Z}$, 转移概率

$$P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1} = 1 - q, \quad i = 0, \pm 1, \dots \quad (0 < p < 1).$$

一切状态显然都相通, 要么全是暂留要么全是常返.

$$\forall i, \quad P_{ii}^{(2n)} = C_{2n}^n p^n q^n, \quad P_{ii}^{(2n+1)} = 0.$$

由 Stirling 公式可知

$$C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}, \quad \text{所以 } P_{ii}^{(2n)} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} (pq)^n.$$

故

$$\begin{cases} \text{当 } p \neq \frac{1}{2} \text{ 时, } i \text{ 为非常返,} \\ \text{当 } p = \frac{1}{2} \text{ 时, } i \text{ 为常返.} \end{cases}$$



定理 3.3.3: (Polya 定理)

对于 \mathbb{R}^d 上的对称随机游动,

- 当 $d = 1, 2$ 时是常返, 而且是零常返的;
- 当 $d \geq 3$ 时是暂留的.

“海阔凭鱼跃, 天高任鸟飞”的概率解读.



正常返与零常返

注. 当 $f_{ii} = \mathbb{P}(T_{ii} < \infty) = 1$, 也就是 i 为常返态时,

$\{f_{ii}^{(n)}, n \geq 1\}$ 是状态 i 首次返回时间 T_{ii} 的概率分布.

记 $\mu_{ii} := \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = \mathbb{E}[T_{ii}]$: i 的平均回转时间.

定义 3.3.5

设状态 i 是常返的.

- 若 $\mu_{ii} < \infty$, 则称 i 为正(positive)常返;
- 若 $\mu_{ii} = \infty$, 则称 i 为零(null)常返.

注. P73 定理 3.1.2 的推论实际已经证明是零常返, 其中转移概率的求解是用的古典方法.



见书中例 3.3.5.

- 注.
- ① 正常返态返回的速度快于零常返态返回的速度.
 - ② 对于仅有有限多个状态的 Markov 链, 常返态 i 对应的 μ_{ii} 总是有限的. 也就是说, 只有在有无穷可列多个状态时, 才可能出现零常返态.
 - ③ 当状态数目不大时, 直接的计算分析就可以把状态分类弄清楚, 当状态数目很大时, 则需借助计算机.



补充例 1 (续) 考虑状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3\}$, 转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix},$$

试求各状态的常返性.

事实上,

$$f_{00}^{(1)} = 0, f_{00}^{(2)} = p_{03}p_{30} = 1/4, f_{00}^{(3)} = p_{03}p_{33}p_{30} = 1/8,$$

$$f_{00}^{(n)} = p_{03}p_{33}^{(n-2)}p_{30} + p_{01}p_{12}p_{23}p_{33}^{(n-4)}p_{30} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-2}},$$

有 $f_{00} = \sum_{n \geq 1} f_{00}^{(n)} = 1$, 所以是常返链. 而

$$\mu_{00} = 4 \Rightarrow \text{可知是正常返链.}$$



下列定理说明各概率分布之间的转换关系.

定理 3.3.4

对任意 $i, j \in E, n \geq 1$,

$$(1) \text{ (首达概率公式:)} P_{ij}^{(n)} = \sum_{\ell=1}^n f_{ij}^{(\ell)} P_{ij}^{(n-\ell)};$$

$$(2) f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} P_{ik} f_{kj}^{(n-1)} \cdot 1_{\{n>1\}} + P_{ij} \cdot 1_{\{n=1\}}, \text{ 即}$$

$$\begin{cases} f_{ij}^{(1)} = P_{ij}, \\ f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} P_{ik} f_{kj}^{(n-1)}, \quad n = 2, 3, \dots; \end{cases}$$

$$(3) i \rightarrow j \Leftrightarrow f_{ij} > 0; \text{ 进一步的, } i \leftrightarrow j \Leftrightarrow f_{ij} > 0 \text{ 且 } f_{ji} > 0.$$



证*. (1) 注意到当 $X_n = j$ 时, $T_j \leq n$.

$$\begin{aligned}
 P_{ij}^{(n)} &= \mathbb{P}^i(X_n = j) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}^i(T_j = k, X_n = j) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}^i(X_k = j, X_v \neq j, 0 < v < k, X_n = j) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}^i(X_k = j, X_v \neq j, 0 < v < k) \mathbb{P}(X_n = j | X_k = j) \\
 &= \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}.
 \end{aligned}$$



(2) 考虑 $n > 1$ 的情形. 由于

$$\begin{aligned} & \{T_{ij} = n\} \\ &= \bigcup_{k \neq j} \{X_1 = k, X_l \neq j, 2 \leq l \leq n-1, X_n = j\}, \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^i(T_{ij} = n) \\ &= \sum_{k \neq j} \mathbb{P}^i(X_1 = k, X_l \neq j, 2 \leq l \leq n-1, X_n = j) \\ &= \sum_{k \neq j} \mathbb{P}^i(X_1 = k) \\ & \quad \cdot \mathbb{P}(X_n = j, X_l \neq j, 2 \leq l \leq n-1 | X_0 = i, X_1 = k) \\ &= \sum_{k \neq j} \mathbb{P}^i(X_1 = k) \mathbb{P}(X_n = j, X_l \neq j, 2 \leq l \leq n-1 | X_1 = k). \end{aligned}$$



(3) 当 $i \rightarrow j$ 时, 存在 $n > 0$ 使得 $P_{ij}^{(n)} > 0$. 取

$$n' = \min\{n : P_{ij}^{(n)} > 0\},$$

则

$$f_{ij}^{(n')} = \mathbb{P}(T_{ij} = n' | X_0 = i) = P_{ij}^{(n')} > 0,$$

从而

$$f_{ij} = \sum_{n \geq 1} f_{ij}^{(n)} \geq f_{ij}^{(n')} > 0.$$

当 $f_{ij} > 0$ 时, 存在 $n' > 0$ 使得 $f_{ij}^{(n')} > 0$. 从而

$$P_{ij}^{(n')} > 0 \Rightarrow i \rightarrow j.$$

同理, 当 $j \rightarrow i$ 时有 $f_{ji} > 0$. 所以

$$i \leftrightarrow j \Leftrightarrow f_{ij} > 0 \text{ 且 } f_{ji} > 0.$$



推论 3.3.2

若 j 非常返, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} < \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = 0$.

证*. (1) 任取正整数 N ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N P_{ij}^{(n)} &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} = \sum_{k=1}^N \sum_{n=k}^N f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=1}^N f_{ij}^{(k)} \sum_{m=0}^{N-k} P_{jj}^{(m)} \leq \sum_{k=1}^N f_{ij}^{(k)} \sum_{m=0}^N P_{jj}^{(m)}, \end{aligned}$$



前面已证

$$\sum_{n=1}^N P_{ij}^{(n)} \leq \sum_{k=1}^N f_{ij}^{(k)} \sum_{m=0}^N P_{jj}^{(m)}.$$

令 $N \rightarrow \infty$, 则由于 j 非常返,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} (1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)}) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)} < \infty.$$

(2) 一个级数收敛则其通项趋于0. □

见书中例 3.3.6, 3.3.7.



遍历态

定义 3.3.6

- 若状态 $i \in E$ 是非周期正常返的, 则称之为遍历的.
- 若一个不可约链所有的状态都是遍历的, 则称此链为不可约遍历链.



平稳分布的得名

- 在什么情况下，初始分布与一步之后的分布相同？
假设马氏链 $X = \{X_n, n \geq 0\}$ 的初始分布是

$$\pi = (\pi_j, j \in E) : \pi_j := \mathbb{P}(X_0 = j), j \in E,$$

则一步之后的分布为

$$\mathbb{P}(X_1 = j) = \sum_{i \in E} \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) \mathbb{P}(X_0 = i) = \sum_{i \in E} \pi_i P_{ij},$$

答案：初始分布与一步之后的分布相同当且仅当

- $\sum_{i \in E} \pi_i P_{ij} = \pi_j, j \in E$ (平稳性/不变性);
- $\pi_j \geq 0, \sum_j \pi_j = 1.$



平稳分布的得名

- 在什么情况下, 初始分布与一步之后的分布相同?
假设马氏链 $X = \{X_n, n \geq 0\}$ 的初始分布是

$$\pi = (\pi_j, j \in E) : \pi_j := \mathbb{P}(X_0 = j), j \in E,$$

则一步之后的分布为

$$\mathbb{P}(X_1 = j) = \sum_{i \in E} \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) \mathbb{P}(X_0 = i) = \sum_{i \in E} \pi_i P_{ij},$$

答案: 初始分布与一步之后的分布相同当且仅当

- $\sum_{i \in E} \pi_i P_{ij} = \pi_j, j \in E$ (平稳性/不变性);
- $\pi_j \geq 0, \sum_j \pi_j = 1.$



设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是以 E 为状态空间的马氏链.

问题: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, n 步转移概率

$$P_{ij}^{(n)} := \mathbb{P}^i(X_n = j) \text{ 的极限是否存在?}$$

若存在, 是否与 i 有关? 若无关, 是否具备上述平稳性?



基本极限定理

定理 3.4.1:

对任意状态 $i \in E$, μ_{ii} 为其平均返回时间.

(1) 若 i 为非常返或零常返态, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = 0;$$

(2) 若 i 为周期为 d 的常返态, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_{ii}}, \text{ 设 } \frac{1}{\infty} = 0.$$

(3) 若 i 为非周期正常返态, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{ii}}.$$



证. (3) 对任意 $t < 0$, 记矩母函数

$$P_i(t) := \sum_{n \geq 0} e^{tn} P_{ii}^{(n)}, \quad F_i(t) := \sum_{n \geq 0} e^{tn} f_{ii}^{(n)}.$$

由定理 3.3.4(1): $P_{ii}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ii}^{(k)} P_{ii}^{(n-k)}$, 可以得到

$$P_i(t) = 1 + P_i(t)F_i(t), \quad \text{即 } P_i(t) = 1/(1 - F_i(t)).$$

其中, $t < 0$ 与正常返性保证级数绝对收敛和号交换合法. 故

$$(1 - e^t)P_i(t) = \frac{1 - e^t}{1 - F_i(t)}.$$

非周期性的假设, 保证极限 $\lim_k P_{ii}^{(k)}$ 存在,



由如下实分析的结果:

Theorem: If the sequence $\{b_n\}$ converges to a limit b ($\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$), then

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} (1 - z) \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = b$$

$$\lim_{t \uparrow 0^-} (1 - e^{-t}) P_i(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{ii}^{(k)}.$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow 0^-} \frac{1 - e^{-t}}{1 - F_i(t)} &= \lim_{t \uparrow 0^-} \frac{-e^{-t}}{-\sum_{n \geq 0} n e^{-tn} f_{ii}^{(n)}} \\ &= 1 / \sum_{n \geq 0} n f_{ii}^{(n)} = 1 / \mu_{ii}. \end{aligned}$$

得证.



注释

上述基本极限定理是所谓 **马氏链的遍历定理**.

- ① 由 (3) 可知遍历态 i 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{ii}}.$$

其中, 非周期性保证左式存在, 正常返性保证等号成立.

- ② 有限马氏链没有零常返态,

不可约的有限马氏链的状态都是正常返的.

- ③ 如果马氏链有一个零常返态, 则必有无穷多个零常返态.



例 3.3.4 (续) 考虑状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3\}$, 转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

的常返性以及遍历性.

解.

$$\begin{aligned} \text{状态 3: } f_{33}^{(1)} &= \frac{1}{2}, \quad f_{33}^{(2)} = P_{30}P_{03} = \frac{1}{4}, \quad f_{33}^{(3)} = 0, \\ f_{33}^{(n)} &= 0, \quad \text{当 } n \geq 5 \text{ 时,} \end{aligned}$$

所以 $f_{33} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{33}^{(n)} = 1$, 推出 3 是常返态. 进一步的, $\mu_3 = 2$,
故为正常返态, 相应的马氏链是个遍历链.



平稳分布的定义

定义 3.4.1

设 $(P_{ij}, i, j \in E)$ 为 Markov 链 $X = \{X_n, n \geq 0\}$ 的转移概率.
若非负数列 $\{\pi_j\}$ 满足

$$(1) \text{ (正则性)} \quad \sum_{j \in E} \pi_j = 1;$$

$$(2) \text{ (不变性)} \quad \pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i P_{ij}, \quad \forall j \in E.$$

则称 $\{\pi_j\}$ 为 X 的平稳分布. 亦称不变的概率测度或不变分布.

注. 不变性可以推出, 对任意 $n \geq 1$,

$$\pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i P_{ij}^{(n)}, \quad \forall j \in E.$$



平稳分布的存在性

定理 3.4.2:

对于非周期不可约链,

正常返是该链存在平稳分布的充要条件.

并且, 此平稳分布就是它的极限分布[†].

对于时齐马氏链, 如果存在状态空间 E 上的概率分布 $\mathbf{p} = (p_i, i \in E)$,

使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = i) = p_i, i \in E$, 则称 \mathbf{p} 是该链的极限分布[†].

注. 若马氏链是不可约非周期的, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}}$; 进一步地,
若 $\{\frac{1}{\mu_{jj}}\}_{j \in E}$ 是一个分布, 则称之为极限分布.



例 3.3.4. (续)

状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3\}$, 转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

对应一个遍历马氏链, 求其平稳分布 π .

解. 由方程 $\pi\mathbf{P} = \pi$, 即

$$\begin{cases} \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1, \\ \pi_0 = \frac{1}{2}\pi_3, \\ \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_0, \\ \pi_2 = \pi_1, \end{cases}$$

解得

$$\pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right).$$



不可约马氏链可分为如下三种情况

- ① 链是暂留的, 不存在平稳分布;
- ② 链是零常返的, 不存在平稳分布;
- ③ 链是正常返的, 存在平稳分布,

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}} = (\mathbb{E}[T_{jj}])^{-1}, j \in E.$$

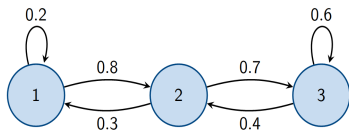
实际上, 长期运行中不论初始状态是什么, 经过一段时间后处于 j 的概率都是 π_j .



例. 考虑马氏链的状态空间是 $E = \{1, 2, 3\}$, 转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

则相应状态转移图是



根据平稳方程可得 $\pi = (3/25, 8/25, 14/25)$, 每个状态的概率流向解释了平衡方程的本质. 以状态 1 为例:

$$\pi_2 P_{21} = \frac{2.4}{25} = \pi_1 P_{12}, \text{ i.e., 流入} = \text{流出.}$$



例 3.3.4. (续)

$$\mu_{33} = 2, \pi_3 = \frac{1}{2}.$$

#

例 3.4.1 设

$$E = \{1, 2\}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 5/8 & 3/8 \end{pmatrix},$$

试求相应平稳分布以及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n$.



汽车比喻：理解核心概念

常返性：车子会不会回来？

- **非常返**：可能永远丢失
- **零常返**：会回来，但等待时间 $\rightarrow \infty$
- **正常返**：会回来，等待时间有限

周期性：发车时间规律？

- **有周期**：像公交车，固定班次
- **无周期**：像网约车，随机到达



转移概率的平均极限

考虑 m 步转移中访问 j 的频率 $\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} I_n$,

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} I_n \mid X_0 = i\right] = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} P_{ij}^{(n)}.$$

其极限总是存在的,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} P_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}}.$$

就长期而言, $\frac{1}{\mu_{jj}}$ 是访问 j 的次数在总时间中的平均份额.

注. $\lim_{m \rightarrow \infty} P_{ij}^{(m)}$ 不一定总存在, 如果存在, 也和 Stolz 定理相吻合:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} P_{ij}^{(n)} = \lim_{m \rightarrow \infty} P_{ij}^{(m)} = \pi_j.$$



Recall

子集 $C \subset E$ 是闭的 $\Leftrightarrow \forall x \in C, y \notin C$, 有 $p_{xy} = 0$.

注. ① 子集 $C \subset E$ 是闭的, 也等价于

$$\text{对任意 } x \in C, \text{ 有 } \sum_{y \in C} p_{xy} = 1.$$

② 也就是说, 闭集中的任何状态均不可达闭集外的状态. 故

X 不可约当且仅当 E 没有非平凡闭子集;

③ 限制在一个闭集上的马氏链仍然是一个马氏链.



例 3.4.3 考虑状态空间 $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 转移矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

的马氏链, 求每个不可约闭集的平稳分布.



例 3.4.4 设马氏链的状态空间 $E = \{0, 1, 2, \dots\}$, 转移矩阵 $\mathbf{P} = (P_{ij}) : i, j \in E$,

$$P_{ij} = \begin{cases} p_i, & j = i + 1, \\ r_i, & j = i, \\ q_i, & j = i - 1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中 $p_i + r_i + q_i = 1$. 这种链称为生灭链, 是不可约的. 记

$$a_0 = 1, \quad a_j = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{j-1}}{q_1 q_2 \cdots q_j}, \quad j \geq 1.$$

试证此链存在平稳分布的充要条件是

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j < \infty.$$



题 7. 设 U_1, U_2, \dots 是独立的 $(0, 1)$ 上均匀分布的随机变量, 且以 N 记满足下式的最小值

$$\prod_{i=1}^n U_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{n+1} U_i, \text{ 其中 } \prod_{i=1}^0 U_i = 1$$

证明: N 是均值为 λ 的 Poisson 随机变量. (提示:
按 n 归纳, 并对 U_1 取条件证明 $\mathbb{P}(N = n) = e^{-\lambda} \lambda^n / n!$.)



证. 首先, 注意到 $\prod_{i=1}^n U_i$ 关于 n 递减, 定义

$$N := \min\{n : \prod_{i=1}^n U_i \geq e^{-\lambda}\},$$

对任意给定自然数 n , $N = n$ 等价于

$$\prod_{i=1}^n U_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{n+1} U_i.$$

下面用数学归纳法证明 $N \sim P(\lambda)$.



$$(1) \mathbb{P}(N = 0) = \mathbb{P}(U_1 < e^{-\lambda}) = e^{-\lambda}.$$

(2) 现假设

$$\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^n U_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{n+1} U_i\right) = e^{-\lambda} \lambda^n / n!$$

成立, 则

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = n + 1) &= \mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^{n+1} U_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{n+2} U_i\right) \\ &= \int_0^1 \mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^{n+1} U_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{n+2} U_i \mid U_1 = x\right) dx \\ &= \int_0^1 \mathbb{P}\left(\prod_{i=2}^{n+1} U_i \geq e^{-\lambda} / x > \prod_{i=2}^{n+2} U_i\right) \cdot \mathbf{1}_{\{x \geq e^{-\lambda}\}} dx \\ &= \int_{e^{-\lambda}}^1 e^{-(\lambda + \ln x)} \frac{(\lambda + \ln x)^n}{n!} dx, \end{aligned}$$



从上式可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = n + 1) &= \frac{1}{n!} \int_{e^{-\lambda}}^1 \frac{e^{-\lambda}(\lambda + \ln x)^n}{x} dx \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{n!} \int_0^\lambda y^n dy \quad (\text{由 } y = \lambda + \ln x) \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

所以, N 是均值为 λ 的泊松随机变量.



- 题 10. 设有一电脉冲, 脉冲的幅度是随机的, 其幅度的变域为 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, 且在其上服从均匀分布. 现用一电表测量其幅度, 每隔一单位时间测量一次, 从第一次测量算起记录其最大值 $X_n, n \geq 1$.
- (1) 试说明 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是一个时齐马氏链;
 - (2) 写出其一步转移矩阵;
 - (3) 仪器记录到最大值 n 的期望时间是多少?



解. 记第 k 次记录的幅度值为 $Y_k, k \geq 1$, 则

(1) Y_1, Y_2, \dots 独立同分布于 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的均匀分布,

$$X_n = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = X_{n-1} \vee Y_n, \quad n \geq 1.$$

所以 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是 $E = \{1, 2, \dots, n\}$ 上的马氏链, 且由 Y_n 与 Y_1 同分布可知 X 是时齐的, 相应一步转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1/n & 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \\ 0 & 2/n & 1/n & \cdots & 1/n \\ 0 & 0 & 3/n & \cdots & 1/n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$



(3) 设 T_n 是仪器记录到最大值 n 的首达时间, 则

$$\mathbb{P}(T_n = k) = \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}}.$$

从而

$$\mathbb{E}[T_n] = \sum_{k \geq 1} k \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}} = n.$$



题 11. 证明：如果状态的个数是 n ，且如果状态 j 可从状态 i 到达，则它可用 n 步或更少的步数到达。

证. 设存在 $k_0 > n$ ，使得存在一条路径： $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{k_0} = j$ ，满足

$$P_{i_0, i_1} > 0, P_{i_1, i_2} > 0, \dots, P_{i_{k_0-1}, i_{k_0}} > 0.$$

而一共只有 n 个状态，将 $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{k_0} = j$ 中剔除重复的状态：

对任意 a ，假如存在 $b > a$ 使得 $i_b = i_a$ ，

则 i_a 状态可直接到达 i_{b+1} ，剔除重复状态后，变成

$$i_1^*, i_2^*, i_3^*, \dots, i_k^* = j,$$

因为状态的个数为 n 所以 $k \leq n$. 得证. □



题 13. 证明: 正常返与零常返是类性质.

证. 利用常返是类性质, 仅需证正常返是类性质. 假设 i, j 互达且 i 正常返, 即满足 $f_{ii} = 1$ 且 $\mu_{ii} < \infty$, 证明

$$\mu_{jj} < \infty.$$

(1) 首达时间的分解: 由假设, 存在 $M, N > 0$ 使得 $\alpha := f_{ji}^{(M)} > 0, \beta := f_{ij}^{(N)} > 0$. 从而

$$f_{ii}^{(N+n+M)} \geq f_{ij}^{(N)} \cdot f_{jj}^{(n)} \cdot f_{ji}^{(M)} = \beta \alpha f_{jj}^{(n)} =: \gamma f_{jj}^{(n)}.$$

(2) 母函数不等式: $F_{ii}(s) \geq \gamma s^{N+M} F_{jj}(s)$. (: 后续分析的基础)



(3) 因为 i 常返, 由 Abel 定理

$$\mu_{ii} = \lim_{s \rightarrow 1^-} F'_{ii}(s), \mu_{jj} = \lim_{s \rightarrow 1^-} F'_{jj}(s),$$

再利用 (2) 中不等式求导可得

$$\mu_{ii} \geq \gamma[N + M + \mu_{jj}],$$

因为对称性, 交换 i 与 j 的角色, 同样存在 $\gamma' > 0$ 使得

$$\mu_{jj} \geq \gamma'[N' + M' + \mu_{ii}].$$

(4) 建立不等式:

$$\mu_{ii} \geq \gamma\mu_{jj} + C_1, \mu_{jj} \geq \gamma'\mu_{ii} + C_2,$$

其中 $C_1 = \gamma(N + M) > 0, C_2 = \gamma'(N' + M') > 0$.



题 14. 设马氏链的状态空间 $E = \{1, 2, 3, 4\}$, 转移矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

试讨论各状态的常返性和周期性, 并回答哪几个状态是遍历态.

解. 由定义, 利用状态转移图易知,

状态 1, 2 是遍历的, 3, 4 是暂留的.



题 19. 设时齐马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的状态空间 $E = \{1, 2, \dots, 7\}$, 一步转移矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) 试对状态空间进行分解;
- (2) 试指出其中周期(是多少?)的正常返状态闭集;
- (3) 试求平稳分布.



解. (1) 状态空间可分解为

$$E = \{2\} \cup \{3\} \cup \{5\} \cup \{1, 4, 6, 7\};$$

(2) 正常返状态闭集有两个, 分别是:

$\{1, 4, 6, 7\}$ 且周期为 2 以及非周期的 $\{3\}$.

(3) 由 (2), 解方程可得相应平稳分布是

$$(\pi_1, \pi_4, \pi_6, \pi_7) = \left(\frac{9}{46}, \frac{15}{46}, \frac{4}{23}, \frac{7}{23} \right) \text{ 以及 } \pi_3 = 1.$$

